Exercício 13 (Cap. 3 do livro)

a) Prove que F é a função de distribuição de uma variável aleatória X.

De acordo com o teorema 3.1 (pág 129 do capítulo 3 do livro), F é uma função de distribuição da variável aleatória X se e só se verifica as seguintes três propriedades:

1. F é não decrescente: $\Delta x > 0 \Rightarrow F(x) \leq F(x + \Delta x)$

- Para $x < 0$ a função F é uma constante logo F é não decrescente.
- Para $0 \leq x < \frac{1}{2}$ tem-se $F(x) = x^2$ cuja a derivada é $F'(x) = 2x > 0$ logo F é não decrescente (estritamente crescente).
- Para $\frac{1}{2} \leq x < 1$ tem-se $F(x) = -(3x^2 - 6x + 2)$ cuja a derivada é $F'(x) = 6 - 6x > 0$ logo F é não decrescente (estritamente crescente).
- Para $x \geq 1$ a função F é uma constante logo F é não decrescente.

Logo F verifica a primeira propriedade.

2. $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Como $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} 0 = 0$ e $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$, F verifica a segunda propriedade.

3. F é contínua à direita: $F(a^+) = \lim_{x \to a^+} F(x) = F(a)$

- $F(0) = 0$
  $F(0^+) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0.$
- $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
  $F\left(\frac{1}{2}^+\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+}[-(3x^2 - 6x + 2)] = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+}[-3x^2] + \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} 6x + \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} 2 = \frac{1}{4}$
- $F(1) = 1$
  $F(1^+) = \lim_{x \to 1^+} 1 = 1$

F verifica a terceira propriedade.

Logo F é a função de distribuição de uma variável aleatória X.

b) Determine a função densidade correspondente.

A função densidade correspondente obtém-se derivando a função de distribuição.

$$f(x) = F'(x) \begin{cases} 2x & , 0 < x < \frac{1}{2} \\ 6 - 6x & , \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

c) Calcule a $P\left(X < \frac{3}{2}\right)$

$P\left(X < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}^-\right) = 1$

d) Encontre o valor de k, tal que $P(x \leq k) = \frac{1}{2}$

$k : P(x \leq k) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad k : F(k) = \frac{1}{2}$

- $0 \leq x < \frac{1}{2}, \quad F\left(\frac{1}{2}^-\right) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

- $\frac{1}{2} \leq x < 1$,

  $F(k) = -3k^2 + 6k + 2 = 0 \Leftrightarrow -3k^2 + 5k + \frac{3}{2} = 0$ (aplicar fórmula resolvente)

  $k_1 = \frac{6-\sqrt{6}}{6} = 0.5918 \quad \vee \quad k_2 = \frac{6+\sqrt{6}}{6} = 1.4082$

  Como $0 < x < 1$, logo a única solução admissível é $k = k_1 = 0.5918$.